Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny

A 2005/2006. évi versenyen kitűzött feladatok

9. évfolyam

1. A következő feladat az első magyar szerző által írott matematika könyvből való.

   Egy haldokló kinek felesége gyermeket vár, ily módon rendelkezik az 1000 aranyat kitevő vagyona felett: ha feleségem fiúnak ad életet, a fiú kapjon két részt, feleségem pedig harmadikat. Ha azonban kislány születik, feleségem kapjon két részt, leánykám pedig a harmadikat. De eljött az idő és a végrendelkező feleségének ikrei születtek: egy fiúcska és egy kislány. Mennyit kap tehát hármuk közül mindegyik a végrendelet kikötéseinek értelmében?

   Magyarországi György Mester: Aritmetika (1499)

   8 pont

2. Hogyan lehet a folyóról pontosan 6 liter vizet felhozni, ha csak két edény áll a rendelkezésre, egy négyliteres és egy kilencliteres?

   Pólya György: A gondolkodás iskolája (1994)

   10 pont

3. Milyen ponthalmazt határoz meg a Descartes–féle derékszögű koordináta-rendszerben az $x^3 + x y^2 + x = y^3 + x^2 y + y$ egyenlet?

   12 pont

4. Melyik az a legkevesebb oldalszámú szabályos sokszög, amelyiket középpontja körül $20,05^{\circ}$ –kal elforgatva önmagába megy át?

   14 pont

5. A nagy matematikus visszaemlékezéseiből megtudhatjuk, miért döntött iskoláskorában a matematika mellett. *Egyszer azt álmodtam, - írja - hogy egy gonosz varázsló fogságába kerültem, aki négy azonos méretű golyót nyomott a kezembe. Kettő közülük fehérre volt festve, a másik kettő fekete volt. A golyókat úgy kellett két, fekete zsebkendőkkel letakart dobozba tennem, hogy mindegyikben legyen golyó. A varázsló azt mondta, hogy az egyik dobozból csukott szemmel ki fog venni egy golyót. Ha az fehér, akkor kiszabadulok, de ha fekete, akkor örökre nála maradok. A varázsló benyúlt a dobozba, én pedig verítékben úszva, rémülten felébredtem. Addig nem is tudtam megnyugodni, amíg rá nem jöttem, hogyan lehetett volna a szabadulás legnagyobb esélyét elérni.*

   Mi a feladat megoldása?

   16 pont

10. évfolyam

1. Bizonyítsa be, hogy ha a is és b is pozitív egész szám, továbbá $100a + b$ osztható 7-tel, akkor $a + 4b$ is osztható 7-tel!

   10 pont

2. Egy egyenlőszárú hegyesszögű háromszög alapjának hossza 1. Mekkora lehet a beírt körének a sugara?

12 pont

3. Hány olyan 2005-nél kisebb pozitív egész szám k szám van, amelyhez található olyan pozitív egész szám, amelynek köbéből a szám k - szorosát levonva, a számot kapjuk meg?

12 pont

4. Az $ABCD$ négyzet belsejében levő P ponton át két, egymásra merőleges egyenes halad át úgy, hogy az egyik az AB, illetve DC oldalt az E, illetve F pontban, a másik a BC, illetve AD oldalt a G, illetve H pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $EF = GH$ teljesül!

12 pont

5. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 1, illetve 2. Tükrözzük a háromszög mindegyik csúcsára a másik két csúcsot.
a.) Mekkora annak a hatszögnek a területe, amelynek a csúcsai ezek a tükörképek?
b.) Derékszögű háromszög helyett tetszőleges háromszögből kiindulva, ugyanilyen tükrözésekkel nyert hatszög területe milyen kiinduló háromszög esetén lesz ugyanannyi, mint az 1 és 2 befogójú derékszögű háromszöghöz tartozó hatszögnél? (Adja meg az ilyen háromszögek halmazát!)

14 pont

11. évfolyam

1. Egy ABC háromszög S súlypontján keresztül húzzunk párhuzamost az AC oldallal, mely az AB oldalt az M pontban metszi, majd az AB oldallal, mely az AC oldalt az N pontban metszi. Határozza meg, hogy az $AMSN$ paralelogramma területe hány százaléka az ABC háromszög területének!

8 pont

2. Oldja meg az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{(x+6)-6\sqrt{5+\sqrt{13-4\sqrt{3}}}}=3.$$

10 pont

3. Hányféleképpen lehet 6 tanuló között 10 egyforma könyvet szétosztani úgy, hogy mindegyik kapjon legalább egy könyvet?

12 pont

4. Legyen $f:\ \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{R}$ függvény,

$$f(\mathrm{x}) = \frac{3x^2+8x+8}{x^2+2x+2}.$$

Határozza meg f minimumát és maximumát!

14 pont

5. Oldja meg az alábbi egyenletet az egész számok halmazán:
$a^4 + b^4 - ab\ (a^3 + b^3) + ab\ (a^2 + b^2) - 8\ (a + b) + 8\ ab - 1 = 0.$

16 pont

12. évfolyam

1. Adott a derékszögű koordinátarendszerben az *OABCDE* hatszög, melynek csúcsai: *O (0;0), A(0;6), B(6;6), C(6;2), D(10;2), E(10;0).* Adja meg annak az origón áthaladó egyenesnek az egyenletét, amelyik a hatszöget két egyenlő területű síkidomra bontja!

10 pont

2. Az (a_n) sorozat első eleme 0, további elemeit úgy képezzük, hogy az előző elem kétszereséhez hozzáadunk 2-t, azaz $a_{n+1} = 2a_n + 2$ $(n \geq 1)$. Határozza meg a_{2005} értékét!

10 pont

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:
$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$

12 pont

4. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2 - 48}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény (abszolút) maximumának helyét és értékét!

13 pont

5. Adott az *ABC* szabályos háromszög alapú *ABCA'B'C'* egyenes hasáb. Legyen *E* az *AC'* lapátló, *F* a *BA'* lapátló és *G* a *CB'* lapátló olyan pontja, amelyre $EC' : AC' = FA' : BA' = GB' : CB' = 1 : 3$. Határozza meg az *ABC* és *EFG* háromszögek területének az arányát!

15 pont