Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny

A 2006/2007. évi versenyen kitűzött feladatok

9. évfolyam

1. Magyarországon a gépjárművek rendszáma (néhány kivételtől eltekintve) három betűből és három számjegyből áll. Legfeljebb hány ilyen rendszámmal ellátott gépjármű lehet Magyarországon, ha a rendszámhoz az angol ábécé 26 betűjét használják fel?

8 pont

2. Mekkora az 1 + 2 – 3 + 4 + 5 – 6 + 7 + 8 - 9 +…+ 2006 kifejezés értéke? (Az összegben a hárommal osztható tagok előjele negatív, a többié pozitív.)

10 pont

3. Mi az egész számok halmazán a megoldása az

$$\frac{1}{x-6}+\frac{1}{y-6}=1$$

egyenletnek?

12 pont

4. Melyik az a legkisebb kerületű háromszög, amelynek egyik oldala a, a hozzá tartozó magassága m? Mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?

14 pont

5. Végződhet-e egy négyzetszám 2006-ra?

16 pont

10. évfolyam

1. Az $ABCD$ trapéz alapjai: AB és CD, ahol $AB > CD$. Bizonyítsa be, hogy $AB + AD > CB + CD$ teljesül!

10 pont

2. Bizonyítsa be, hogy ha p prímszám, akkor az $x^2 + p\,x + 3p = 0$ egyenletnek nincs egész szám megoldása!

10 pont

3. Szerkessze meg az adott ABC háromszögnek azt a belső P pontját, amelyre az ABP, ACP, BCP háromszögek területének az arányára $T_{ABP} : T_{ACP} : T_{BCP} = 1 : 2 : 3$ áll fenn!

12 pont

4. Bizonyítsa be, hogy ha egy szabályos sokszög oldalszáma legalább öt, akkor bármely két P, Q csúcspontjához található tőlük különböző R és S csúcspont úgy, hogy PQ párhuzamos RS - sel!

14 pont

5. Adja meg azt a legkisebb természetes számot, amelyik osztható 40-nel, és 40 a számjegyeinek összege is! (A természetes szám tízes számrendszerben van felírva.)

14 pont

11. évfolyam

1. Határozza meg az *m, n* valós paramétere értékét , ha tudjuk hogy az $x^2 + (m+3)x - (n+4) = 0$ egyenlet gyökei a $4x^2 + m\,x + n = 0$ egyenlet gyökeinek a reciprokai.

8 pont

2. Határozza meg egy adott kör köré írtható rombuszok közül annak a rombusznak a hegyesszögét, melynek területe éppen kétszerese az adott kör köré írható minimális területű rombusz területének!

10 pont

3. Oldja meg az alábbi egyenletet az egész számok halmazán:
$x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2 + x^2 y^2 + 3\,x^2 y + 3xy^2 + 4 = 0.$

12 pont

4. Bizonyítsa be, hogy 17-nek van olyan hatványa, melynek utolsó számjegye1, az előtte levő 2006 számjegy pedig 0.

16 pont

5. Számítsa ki a következő összeget: $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{2}{2005\cdot 2006\cdot 2007}$.

16 pont

12. évfolyam

1. Melyik az a számtani sorozat, amelyben az első öt páratlan indexű tag összege 85, és az első öt páros indexű tag összege 100? Írja fel a sorozat első 10 tagját!

9 pont

2. Egy gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal két egyenlő térfogatú részre bontjuk. Határozza meg az így keletkezett kis gúla és csonkagúla palástjai felszínének az arányát!

10 pont

3. Egy dobókockát háromszor egymás után feldobunk. Azt tapasztaljuk, hogy az első két dobott szám összege megegyezik a harmadik dobás eredményével. Mennyi annak valószínűsége, hogy legalább egyszer 2-est dobunk?

13 pont

4. Határozza meg az

$$1 + \cos 2x \geq \cos x\,(1 + |1 - 2\cos x|)$$

egyenlőtlenség megoldásait a $[0\,;\,2\pi]$ intervallumon!

13 pont

5. Az *f* függvényre teljesül, hogy

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}\, f(x)$$ minden valós számra.

Bizonyítsa be, hogy az *f* függvény periodikus és adja meg a periódusát! *15 pont*